15.細長い棒状弾性体における動力学(パターン形成の運動及び統計,研究会報告)

鶴, 秀生

一方，(12)式は線型近似が成立する領域，つまり平衡あるいは定常過程近傍での，巨視的物理量の緩和の様子を定めた式である。これを(10)式と比較すれば，変数の満たす式の構造は一致し，このことは線型近似の成り立つ領域内にあってはそのまわりのゆらぎの緩和過程がたしかに巨視的物理量の緩和の様子に等しいことを主張する。

線型領域におけるゆらぎの緩和が巨視的物理量のそれに一致するという事実は着目するパターン形成に対応する各ステージにおいて成立し，このことからこれはまた，ブラウン運動論でいわれている自己相似性を支持するものにほかならない。

本報告において，Onsager のいう regression of fluctuation の仮定から仮定の枠組をとりはずした一般化が行えたことと，同時にいえた自己相似性によって，ゆらぎの緩和則が普偏性の高い法則となりえたことを解析的に示せたことは新しい。

参 考 文 献

1) M. Ochiai: Lett. Nuovo Cimento **40** (1984) 433

2) M. Ochiai, A. Holz and Y. Yamazaki to be published

15. 細長い棒状弾性体における動力学

東大・教養　鶴　　秀　生

細長い棒状の連続体は局所的に微少な変形しか許さない場合でも全体的には大変形を伴うことができる。このような大変形の影響を考慮することによって，弾性体の運動を記述する方程式は線形の弾性法則に従う場合でも大変複雑な非線形方程式となる。大変形の影響を考慮した細長い棒状弾性体の運動方程式は変分法を使って導かれる。その方程式を基にして様々な運動を調べることにする。特にソリトン解が存在することがわかった。

弾性体の変形による弾性エネルギーUは，曲げの弾性エネルギーU_bと振りの弾性エネルギーU_tの和で表すことができる。

$$U = U_b + U_t = \frac{A}{2}\int_0^L (\theta'^2 + \sin^2\theta\,\varphi'^2)\,\mathrm{d}s + \frac{c}{2}\int_0^L (\cos\theta\,\varphi' + \psi')^2\,\mathrm{d}s$$

ここで(′)は棒の弧長に対する微分，A，Cは曲げと振りの弾性定数，θ，ϕ，ψはオイラー角である。また運動エネルギーKは，棒の並進運動によるエネルギーK_{tr}，接ベクトルの回転

による運動エネルギー K_{r1}，中心軸のまわりの回転による運動エネルギー K_{r2} の和となる。

$$K = K_{tr} + K_{r1} + K_{r2} = \frac{\rho}{2}\int_0^L \dot{\boldsymbol{r}}^2 \, ds + \frac{K_1}{2}\int_0^L \dot{\boldsymbol{t}}^2 \, ds + \frac{K_2}{2}\int_0^L (\cos\theta\,\dot{\varphi}' + \dot{\psi})^2 \, ds$$

ここで， ρ，K_1，K_2 はそれぞれ綿密度，中心軸に垂直な方向の慣性モーメント， 中心軸方向の慣性モーメントである。またドットは時間に対する微分である。これらをもとにしてラグランジアン L を

$$L = K - U$$

で導入することができる。接ベクトル $\boldsymbol{t}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の間に関係式

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{t}$$

$$= (\sin\theta\sin\varphi\,,\ -\sin\theta\cos\varphi\,,\ \cos\theta)$$

がなりたつ。この関係式を拘束条件としてラグランジアン L から得られる作用 I の変分を取るために汎関数 I_c を導入する。

$$I_c = \int_0^T dt + \int_0^T dt \int_0^L ds\,(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{t}) \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

ここで $\boldsymbol{\lambda}$ はベクトル値のラグランジュの未定関数である。 I_0 を θ，ϕ，ψ，$\boldsymbol{r}$ について変分をとることによって非線形な運動方程式が得られる。

$$-\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} - \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial s} = 0 \quad ,$$

$$k_1\{\sin\theta\cos\theta(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2 - \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\} - k_2(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial t})\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$-A\{\sin\theta\cos\theta(\frac{\partial\phi}{\partial s})^2 - \frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}\} + C(\frac{\partial\psi}{\partial s} + \cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial s})\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial s}$$

$$-\lambda_x\cos\theta\sin\phi + \lambda_y\cos\theta\cos\phi + \lambda_z\sin\theta = 0\,,$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\{k_1\sin^2\theta\frac{\partial\phi}{\partial t} + k_2(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial t})\cos\theta\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\{A\sin^2\theta\frac{\partial\phi}{\partial s}+C(\frac{\partial\psi}{\partial s}+\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial s})\cos\theta\}$$

$$-\lambda_x\sin\theta\cos\phi-\lambda_y\sin\theta\sin\phi=0\quad,$$

$$-k_2\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial t})+C\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial\psi}{\partial s}+\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial s})=0\,.$$

これらの方程式を様々な条件のもとで解くことができる。

まず $\phi=\psi=0$ で $\theta=\varepsilon$ とおいて ε の高次の項を無視することによって棒 の曲げに対する微少振動を調べることにする。すると上の方程式は下のように簡単になる。

$$\rho\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}-k_1\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial s^2\partial t^2}+A\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial s^4}=0$$

よって分散関係式は

$$\omega^2=\frac{Ak^4}{\rho+k_1k^2}$$

となる。

また振りの振動に対して $\theta=\phi=0$ とおいて解くと下のような分散関係式をえる。

$$\omega=\sqrt{\frac{C}{k^2}}\,k$$

$\phi=\psi=0$ で θ が $u=s-vt$ のみの関数であるとき θ の高次の項を厳密に取り扱うと運動方程式は下のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\theta+\omega_0^2\sin\theta=0$$

境界条件を考慮すると，ソリトン解は下の式であらわされる。

$$\sin\frac{\theta}{2}=\tanh(\omega_0u)$$

$$y=\frac{2}{\omega_0}\mathrm{sech}\{\omega_0(s-vt)\}$$

$$=-s+\frac{2}{\omega_0}\tanh\{\omega_0(s-vt)\}$$

ソリトンの形は図１のようになる。

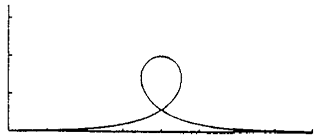

図1

このように局所的に微少な変形しか許さない場合でも細長い棒状弾性体の運動方程式は複雑な非線形方程式となり，その方程式から微少振動解やソリトン解を導くことができる。

References

H. Tsuru : preprint

A. E. H. Love : *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.*

16. 沈殿に伴うパターン形成

九工大・工　甲　斐　昌　一

1. はじめに

不安定になった溶液からの結晶成長は，一つの結晶界面の成長に注目した研究と，多分散となった多くの結晶の成長の統計的な挙動に注目した研究の二面がある。ここでは後者の観点に立った研究を行なっている。今，一つの溶液には $Pb(NO_3)_2$ が他には Kl が適量（～1Mのオーダー）溶質として溶けこんでいる二つの溶液を準備し，これらをゲル化させたのち接触させると，図1に示すような，ある特殊な法則（スペース則）を持った周期構造が形成される〔1－3〕。このような巨視的周期構造は Liesegang ring と呼ばれ，濃度勾配が存在する場合に見られる。一方濃度勾配がなくても，特有の構造が見られる。これらの構造の形成に対しては，多くの理論があるが多くは定性的議論にとどまり，定量的な研究は Ostwald の過飽和理論と，コロイド不安定性（競合成長）理論のみである。これはパターン形成が各々 pre- と post－nucleation 現象であるとの立場を採るもので，ここでは，これらの理論と沈澱パターンの最近の実験結果に関して述べる。

2. 理論的および実験的背景

Ostwald の過飽和理論では，反応し沈澱物（C）を作る二つのイオン A^+，B^- の反応と，こ